0. TEMAS BÁSICOS

0.2. EL PRINCIPIO DE INDUCCIÓN

0.2.1. Definición

Sea $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ el conjunto de los números naturales, y $P(n)$ una cierta propiedad que puede ser o no cierta para cada número natural n. El **principio de inducción matemática** afirma que si:

i) $P(1)$ es cierta, es decir, el número natural 1 verifica la propiedad, y

ii) suponiendo que $P(k)$ es cierta se puede probar que $P(k+1)$ también es cierta,

entonces, cualquier número natural verifica la propiedad.

0.2.2. Observaciones

1. El principio de inducción se basa en que los números naturales forman un conjunto cuyo primer elemento es el 1 y que está bien ordenado (todo subconjunto suyo tiene un primer elemento).
2. Si la hipótesis i), "$P(1)$ es cierta", se cambia por "$P(n_0)$ es cierta", con $n_0 \in \mathbb{N}$, entonces el principio de inducción concluye que la propiedad es cierta para cualquier número natural $n \geq n_0$.

0.2.3. Ejemplos

1. *Demuestra que para cualquier número natural n se cumple que:*

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Solución: En primer lugar, es fácil comprobar que la propiedad es cierta para $n = 1$:

$$1 = \frac{1(1+1)}{2}$$

Ahora, suponiendo que la propiedad es cierta para $n = k$, es decir, que se cumple:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + k = \frac{k(k+1)}{2}$$

hay que probar que se cumple para $n = k + 1$:

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + \ldots + k + (k+1) &= (1 + 2 + 3 + \ldots + k) + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \\ &= \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2} = \frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2} \end{aligned}$$

lo que asegura que la propiedad es cierta para $n = k + 1$. Entonces, por el principio de inducción matemática, la propiedad es cierta para cualquier número natural.

2. *Demuestra que para cualquier número natural n se cumple que:*

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Solución: La propiedad es cierta para $n = 1$:

$$1^2 = \frac{1(1+1)(2 \cdot 1 + 1)}{6}$$

y, suponiendo que la propiedad es cierta para $n = k$, es decir, que se cumple:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

hay que probar que se cumple para $n = k+1$:

$$\begin{aligned}
1^2+2^2+3^2+\ldots+k^2+(k+1)^2 &= \left(1^2+2^2+3^2+\ldots+k^2\right)+(k+1)^2 = \\
&= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)+6(k+1)^2}{6} = \\
&= \frac{(k+1)\left(2k^2+k+6k+6\right)}{6} = \frac{(k+1)\left(2k^2+7k+6\right)}{6} = \\
&= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} = \frac{(k+1)[(k+1)+1][2(k+1)+1]}{6}
\end{aligned}$$

lo que asegura que la propiedad es cierta para $n = k+1$. Entonces, por el principio de inducción matemática, la propiedad es cierta para cualquier número natural.

3. *Demuestra que para cualquier número natural n se cumple que $n^3 - n$ es divisible por 6.*
Solución: La propiedad es cierta para $n = 1$:

$$1^3 - 1 = 0 \quad \text{que es divisible por } 6$$

y, suponiendo que la propiedad es cierta para $n = k$, es decir, que $k^3 - k$ es divisible por 6:

$$k^3 - k = 6p$$

hay que probar que se cumple para $n = k+1$. Operando:

$$(k+1)^3-(k+1) = k^3+3k^2+3k+1-k-1 = k^3+3k^2+2k = (k^3-k)+3k^2+3k = 6p+3k(k+1)$$

y teniendo en cuenta que el producto de un número por su siguiente es múltiplo de 2, ya que alguno de ellos es par, se cumple que:

$$(k+1)^3-(k+1) = 6p+3k(k+1) = 6p+3\cdot 2q = 6(p+q)$$

de donde se concluye que es múltiplo de 6 y la propiedad es cierta para $n = k+1$. Entonces, por el principio de inducción matemática, la propiedad es cierta para cualquier número natural.

4. *Demuestra que para cualquier número natural $n \geq 4$ se cumple que $2^n < n!$.*
Solución: La propiedad es cierta para $n = 4$:

$$\begin{cases} 2^4 = 16 \\ 4! = 24 \end{cases} \implies 2^4 < 4!$$

Suponiendo que la propiedad es cierta para $n = k$:

$$2^k < k! \ \text{ es decir, que } \ 2^k - k! < 0$$

hay que probar que se cumple para $n = k+1$. Puesto que $2 < k+1$, para $k \geq 4$, entonces:

$$2^{k+1}-(k+1)! = 2\cdot 2^k-(k+1)k! < (k+1)2^k-(k+1)k! = (k+1)(2^k-k!) < 0$$

de donde se deduce que $2^{k+1} < (k+1)!$ y la propiedad es cierta para $n = k+1$. Entonces, por el principio de inducción matemática, la propiedad es cierta para cualquier número natural $n \geq 4$.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. *Demuestra que para cualquier número natural* $n \in \mathbb{N}$ *se cumple que:*

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

Solución: La propiedad es cierta para $n = 1$:

$$1^3 = \left(\frac{1 \cdot 2}{2}\right)^2$$

y, suponiendo que la propiedad es cierta para $n = k$, es decir, que se cumple:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + k^3 = \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2$$

hay que probar que se cumple para $n = k + 1$:

$$\begin{aligned} 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + k^3 + (k+1)^3 &= \left(1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + k^3\right) + (k+1)^3 = \\ &= \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2 + (k+1)^3 = \frac{k^2(k+1)^2 + 4(k+1)^3}{4} = \frac{(k+1)^2(k^2+4k+4)}{4} = \\ &= \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4} = \left(\frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

lo que asegura que la propiedad es cierta para $n = k + 1$. Entonces, por el principio de inducción matemática, la propiedad es cierta para cualquier número natural.

2. *Demuestra que para cualquier* $n \in \mathbb{N}$ *el número* $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$ *es divisible por* 9.
Solución: La propiedad es cierta para $n = 1$:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 = 36 \quad \text{que es divisible por 9}$$

y, suponiendo que la propiedad es cierta para $n = k$, es decir, que $k^3 + (k+1)^3 + (k+2)^3$ es divisible por 9:

$$k^3 + (k+1)^3 + (k+2)^3 = 9p$$

hay que probar que se cumple para $n = k + 1$. Operando:

$$\begin{aligned} (k+1)^3 + (k+2)^3 + (k+3)^3 &= (k+1)^3 + (k+2)^3 + k^3 + 9k^2 + 27k + 27 = \\ &= [k^3 + (k+1)^3 + (k+2)^3] + 9(k^2 + 3k + 3) = 9p + 9(k^2 + 3k + 3) \end{aligned}$$

que es múltiplo de 9, y la propiedad es cierta para $n = k+1$. Entonces, por el principio de inducción matemática, la propiedad es cierta para cualquier número natural.

3. *Demuestra que para cualquier* $n \in \mathbb{N}$ *el número* $3 \cdot 5^{2n+1} + 2^{3n+1}$ *es múltiplo de* 17.
Solución: La propiedad es cierta para $n = 1$:

$$3 \cdot 5^{2 \cdot 1+1} + 2^{3 \cdot 1+1} = 3 \cdot 5^3 + 2^4 = 391 = 23 \cdot 17$$

y, suponiendo que la propiedad es cierta para $n = k$, es decir, que $3 \cdot 5^{2k+1} + 2^{3k+1}$ es múltiplo de 17:

$$3 \cdot 5^{2k+1} + 2^{3k+1} = 17p \tag{1}$$

hay que probar que se cumple para $n = k + 1$. Operando:

$$3 \cdot 5^{2(k+1)+1} + 2^{3(k+1)+1} = 3 \cdot 5^{2k+3} + 2^{3k+4} = 25 \cdot 3 \cdot 5^{2k+1} + 8 \cdot 2^{3k+1}$$

y usando (**??**):

$$\begin{aligned} 3 \cdot 5^{2(k+1)+1} + 2^{3(k+1)+1} &= 25\left(17p - 2^{3k+1}\right) + 8 \cdot 2^{3k+1} = 25 \cdot 17p - 25 \cdot 2^{3k+1} + 8 \cdot 2^{3k+1} = \\ &= 25 \cdot 17p - 17 \cdot 2^{3k+1} = 17\left(25p - 2^{3k+1}\right) \end{aligned}$$

que es múltiplo de 17, y la propiedad es cierta para $n = k + 1$. Entonces, por el principio de inducción matemática, la propiedad es cierta para cualquier número natural.

4. *Demuestra que, siendo $a > 0$, para cualquier número natural $n \in \mathbb{N}$ se cumple que:*

$$(1+a)^n \geq 1 + an$$

Solución: La propiedad es cierta para $n = 1$:

$$(1+a)^1 \geq 1 + a \cdot 1$$

y, suponiendo que la propiedad es cierta para $n = k$, es decir, que:

$$(1+a)^k \geq 1 + ak$$

hay que probar que se cumple para $n = k+1$. Operando:

$$(1+a)^{k+1} = (1+a)^k(1+a) \geq (1+ak)(1+a) = 1 + ak + a + a^2k = 1 + a(k+1) + a^2k \geq 1 + a(k+1)$$

ya que $a^2k \geq 0$, de donde se concluye que la propiedad es cierta para $n = k+1$. Entonces, por el principio de inducción matemática, la propiedad es cierta para cualquier número natural.

5. *Demuestra que para cualquier número natural $n \in \mathbb{N}$ se cumple que:*

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n$$

Solución: La propiedad es cierta para $n = 1$:

$$\binom{1}{0} + \binom{1}{1} = 2^1$$

y, suponiendo que la propiedad es cierta para $n = k$, es decir, que:

$$\binom{k}{0} + \binom{k}{1} + \binom{k}{2} + \ldots + \binom{k}{k} = 2^k$$

hay que probar que se cumple para $n = k+1$. Usando las propiedades de los números combinatorios y operando:

$$\binom{k+1}{0} + \binom{k+1}{1} + \binom{k+1}{2} + \ldots + \binom{k+1}{k} + \binom{k+1}{k+1} =$$

$$= \binom{k}{0} + \left[\binom{k}{0} + \binom{k}{1}\right] + \left[\binom{k}{1} + \binom{k}{2}\right] + \ldots + \left[\binom{k}{k-1} + \binom{k}{k}\right] + \binom{k}{k} =$$

$$= 2\left[\binom{k}{0} + \binom{k}{1} + \binom{k}{2} + \ldots + \binom{k}{k}\right] = 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$$

de donde se concluye que la propiedad es cierta para $n = k+1$. Entonces, por el principio de inducción matemática, la propiedad es cierta para cualquier número natural.

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Demuestra, usando el principio de inducción matemática, que para cualquier número natural $n \in \mathbb{N}$ se cumple cada una de las siguientes propiedades:

(a) $1^4 + 2^4 + 3^4 + \ldots + n^4 = \dfrac{n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}{30}$

(b) $\dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \dfrac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{n}{n+1}$

(c) $\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \ldots + n\binom{n}{n} = n2^{n-1}$

(d) $7^n - 1$ es divisible por 6

(e) $2^{2n} + 15n - 1$ es múltiplo de 9

(f) $2^{2n} > n^2$